

سلسلة 1	عموميات حول الدوال حل مقترح	السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية
تمرين 1: لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية:		
$g(x) = \frac{x^3 - 5}{2 x-3 - 8}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / 2 x-3 - 8 \neq 0\}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 4\}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x-3 \neq 4 \text{ et } x-3 \neq -4\}$ $Dg = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 7 \text{ et } x \neq -1\}$ $Dg =]-\infty, -1[\cup]-1, 7[\cup]7, +\infty[$	$f(x) = \frac{4 x + 3}{x^2 + 4x + 4}$ $Df = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 4x + 4 \neq 0\}$ $Df = \{x \in \mathbb{R} / (x+2)^2 \neq 0\}$ $Df = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$ $Df = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -2\}$ $Df =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$	
$p(x) = \frac{5 - x }{ x + 7}$ $Dp = \{x \in \mathbb{R} / x + 7 \neq 0\}$ $Dp = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -7\}$ $Dp = \mathbb{R}$ <p>لأن العبارة $x \neq -7$ صحيحة لكل x من \mathbb{R} وذلك لكون $x \geq 0$ بينما $-7 < 0$</p>	$h(x) = \frac{6 + x^4}{x - \frac{1}{x}}$ $Dh = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x - \frac{1}{x} \neq 0 \right\}$ $Dh = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{x} \right\}$ $Dh = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x^2 \neq 1\}$ $Dh = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$ $Dh =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$	
$k(x) = \frac{5 - x }{x^2 - 3x + 4}$ $Dk = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 4 \neq 0\}$ <p>محددة الحدودية $x^2 - 3x + 4$ هي: $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$ إذن ليس للمعادلة $x^2 - 3x + 4 = 0$ حل في \mathbb{R} أي أن العبارة $x^2 - 3x + 4 \neq 0$ صحيحة لكل x من \mathbb{R} $Dk = \mathbb{R}$ بالتالي:</p>	$q(x) = \frac{(5-x)(2-x)}{x^2 + x - 6}$ $Dq = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 6 \neq 0\}$ <p>محددة الحدودية $x^2 + x - 6$ هي: $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$ حلا المعادلة $x^2 + x - 6 = 0$ هما: $x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$ و $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ منه: $Dq = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ et } x \neq -3\}$ $Dq =]-\infty, -3[\cup]-3, 2[\cup]2, +\infty[$</p>	
$m(x) = \sqrt{3 - x-4 }$ $Dm = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x-4 \geq 0\}$ $Dm = \{x \in \mathbb{R} / x-4 \leq 3\}$ $Dm = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x-4 \leq 3\}$ $Dm = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x \leq 7\}$ $Dm = [1, 7]$	$t(x) = \frac{5 - \sin(x)}{2 \sin(x) - 1}$ $Dt = \{x \in \mathbb{R} / 2 \sin(x) - 1 \neq 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq \frac{1}{2} \right\}$ $Dt = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sin(x) \neq \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right\}$ $Dt = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } x \neq \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $Dt = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } x \neq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $Dt = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	

$$l(x) = \sqrt{x^3 - 8} + \frac{1-x}{|x+1| - |x-7|}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 8 \geq 0 \text{ et } |x+1| - |x-7| \neq 0\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \geq 8 \text{ et } |x+1| \neq |x-7|\}$$

$$Dl = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } \begin{cases} x+1 \neq x-7 \\ x+1 \neq 7-x \end{cases} \right\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } 1 \neq -7 \text{ et } 2x \neq 6\}$$

$$Dl = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } x \neq 3\}$$

$$Dl = [2, 3[\cup]3, +\infty[$$

$$r(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$Dr = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x^2 + x - 2 \geq 0\}$$

محددة الحدودية $x^2 + x - 2$ هي :

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

حلا المعادلة $x^2 + x - 6 = 0$ هما :

$$\text{إذن : } x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ و } x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

x	-2	1
$x^2 + x - 2$	+	-

$$Dr = [0, +\infty[\cap (]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[)$$

$$Dr = [1, +\infty[$$

منه :

لتحديد مجموعة التعريف يجب أن نبحث عن قيم x بحيث يكون: «المقام غير منعدم» - «ما بداخل الجذر المربع موجب» وهذا ما يؤدي غالبا إلى البحث عن حلول معادلة أو مترابحة.

تمرين 2 : لندرس زوجية الدوال التالية :

$$g(x) = \frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$Dg = \{x \in \mathbb{R} / x^4 + x^2 + 1 \neq 0\}$$

$$(\Delta < 0) \quad Dg = \{x \in \mathbb{R} / (x^2)^2 + (x^2) + 1 \neq 0\} \quad \blacksquare$$

$$Dg = \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = \frac{\cos(-x)}{(-x)^4 + (-x)^2 + 1} \quad \blacksquare$$

$$g(-x) = \frac{\cos(x)}{x^4 + x^2 + 1} = g(x)$$

إذن g دالة زوجية

$$f(x) = \frac{x^3}{|x|+5}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / |x|+5 \neq 0\}$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq -5\} \quad \blacksquare$$

$$Df = \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \frac{(-x)^3}{|-x|+5} \quad \blacksquare$$

$$f(-x) = \frac{-x^3}{|x|+5} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$p(x) = |x| + |x+1| + |x-1|$$

$$Dp = \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p(-x) = |-x| + |-x+1| + |-x-1|$$

$$p(-x) = |-x| + |-x+1| + |-x-1|$$

$$p(-x) = |x| + |1-x| + |-(x+1)| \quad \blacksquare$$

$$p(-x) = |x| + |x-1| + |x+1|$$

$$p(-x) = p(x)$$

إذن p دالة زوجية

$$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^3 - 1}$$

$$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x^3 - 1 \neq 0\}$$

$$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x^3 \neq 1\} \quad \blacksquare$$

$$Dh = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$$

$$Dh =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$-1 \notin Dh \text{ لكن } -1 \in Dh \quad \blacksquare \text{ لدينا :}$$

إذن h ليست بدالة زوجية و لا فردية

$$k(x) = \frac{\sqrt{|x-2|} + \sqrt{|x+2|}}{x^4 - 1}$$

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x^4 - 1 \neq 0 \text{ et } |x-2| \geq 0 \text{ et } |x+2| \geq 0\}$$

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x^4 \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \neq 1\}$$

$$Dk = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ et } x \neq -1\}$$

$$Dk =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$$

لدينا: $x \in Df \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \Rightarrow -x \neq -1 \text{ et } -x \neq 1 \Rightarrow -x \in Df$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad k(-x) = \frac{\sqrt{|-x-2|} + \sqrt{|-x+2|}}{(-x)^4 - 1} = \frac{\sqrt{|-(x+2)|} + \sqrt{|x-2|}}{x^4 - 1} = \frac{\sqrt{|x+2|} + \sqrt{|x-2|}}{x^4 - 1} = k(x)$$

إذن k دالة زوجية

في الغالب، خصوصا عند دراسة الدوال لا يتم طرح السؤال بهذه الطريقة بل يطلب البرهان على أن الدالة زوجية أو فردية، لكن طرح السؤال بهذه الطريقة يجعل استيعاب مفهوم الزوجية أفضل، حيث نرى من خلال الدالة h مثلا لدالة لا زوجية ولا فردية و طريقة البرهان في هذه الحالة.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} \quad \text{تمرين 3}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = 4 - 8 = -4 < 0 \quad \text{محددة الحدودية } x^2 + 2x + 2 \text{ هي}$$

إذن للحدودية $x^2 + 2x + 2$ نفس إشارة $a = 1$ أي أنها موجبة قطعاً لكل x من \mathbb{R}

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \quad \text{حسب السؤال السابق نستنتج أن:}$$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 1 = \frac{2x^2 + 4x + 3 - (x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 3 - x^2 - 2x - 2}{x^2 + 2x + 2}$$

لدينا:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 2x + 2} \geq 0$$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 2} - 2 = \frac{2x^2 + 4x + 3 - 2(x^2 + 2x + 2)}{x^2 + 2x + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 3 - 2x^2 - 4x - 4}{x^2 + 2x + 2}$$

ولدينا:

$$f(x) - 2 = \frac{-1}{x^2 + 2x + 2} < 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq f(x) < 2 \quad \text{بالتالي:}$$

استعملنا السؤال الأول وذلك لتحديد إشارة المقام

و استعملنا طريقة حساب الفرق مرتين لإثبات التفاوتات المطلوبة.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(-1) : \text{فإن } f(-1) = \frac{2-4+3}{1-2+2} = 1 \text{ و } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 1$$

بالتالي 1 هو القيمة الدنيا المطلقة للدالة f في العدد -1

نفترض أن 2 هي قيمة قصوية للدالة f

$$3 = 4 : \text{منه } 2a^2 + 4a + 3 = 2a^2 + 4a + 4 : \text{منه } \frac{2a^2 + 4a + 3}{a^2 + 2a + 2} = 2 : \text{منه } f(a) = 2 \text{ حيث } a \in \mathbb{R} \text{ إذن يوجد}$$

وهذا غير ممكن، بالتالي 2 ليست قيمة قصوية للدالة f

رغم أن جميع صور الدالة f أصغر من 2، فهذه الأخيرة لا تمثل قيمة قصوية، لأن من شروط ذلك أن تكون القيمة القصوية صورة عدد ينتمي لمجموعة التعريف.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x}} : \text{تمرين 4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ et } x > 0\} =]0; +\infty[\quad 1$$

لنبين أن 2 هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة f

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) - 2 = \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2 = \frac{x+9-6\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2 \times \sqrt{x} \times 3 + 3^2}{3\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{3\sqrt{x}} \geq 0 \quad \text{لدينا:}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) \geq 2 \quad \text{منه:}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f(x) \geq f(9) : \text{فإن } f(9) = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 1+1=2 \quad \text{وبما أن:} \quad 2$$

بالتالي 2 هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة f

القيمة التي تكون صورتها هي القيمة القصوى هي التي تجعل الفرق ينعدم، بمعنى في حالتنا نحل المعادلة

$$x=9 \quad \text{في ورقة للبحث وسنجد} \quad \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{3\sqrt{x}} = 0$$